

更新定理

- 1 基本定义
 - 定义
 - 大数律的推论
- 2 $N(t)$ 的分布与更新函数
 - $N(t)$ 的分布
 - 更新函数
- 3 极限定理与停时
 - 极限定理
 - 作业点评
 - 停时
 - 基本更新定理



例 5.1.1 (量化交易策略循环问题)

某量化交易策略一旦完成一次交易闭环(开仓→平仓), 就马上开始下一次交易.

设 $\{X_n\}$ 为第 n 次交易的持仓时长(持有周期), 则对于 $t \geq 0$,

$$N(t) = \sup\{n > 0 : S_n \leq t\} : t \text{ 为止完成的交易次数.}$$

此计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 即为一更新过程.

任何在时间上“重复发生, 每次发生陡然系统从头开始一个循环的随机现象”, 都可以尝试用更新过程来建模和分析.

高频交易中的订单到达: 金融市场的订单流(Order Flow)往往不是 Poisson 过程(因为有集聚效应), 但可以用更新过程来近似. 讨论 μ 的大小如何影响市场流动性.



例 5.1.1 (量化交易策略循环问题)

某量化交易策略一旦完成一次交易闭环(开仓→平仓), 就马上开始下一次交易.

设 $\{X_n\}$ 为第 n 次交易的持仓时长(持有周期), 则对于 $t \geq 0$,

$$N(t) = \sup\{n > 0 : S_n \leq t\} : t \text{ 为止完成的交易次数.}$$

此计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 即为一更新过程.

任何在时间上“重复发生, 每次发生陡然系统从头开始一个循环的随机现象”, 都可以尝试用更新过程来建模和分析.

高频交易中的订单到达: 金融市场的订单流(Order Flow)往往不是 Poisson 过程(因为有集聚效应), 但可以用更新过程来近似. 讨论 μ 的大小如何影响市场流动性.



第一节 基本定义

下面是我们的数学定义.

定义 5.1.1

假设:

- (1) $\{X_n, n \geq 1\}$ 为独立同分布的非负随机变量序列;
- (2) X_n 的公共分布函数 F 满足 $F(0) = \mathbb{P}(X_n = 0) < 1$.

令

$$S_0 \equiv 0, S_n := \sum_{i=1}^n X_i, \quad (n \geq 1),$$

$$N(t) := \sup\{n : S_n \leq t\} \left(= \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{S_n \leq t\}} \right).$$

则称 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为更新过程.



例 1. 考虑一台ATM机, 顾客到达的时间间隔是随机的.
设 X_n 表示第 $n-1$ 个顾客与第 n 个顾客的到达时间间隔,
则

$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 表示第 n 个顾客的到达时间,
 $N(t) = \sup\{n : S_n \leq t\}$ 表示到时间 t 为止到达的顾客总数.

这也是一个典型的更新过程. #

关注的问题

- ◇ 在一段时间内, 这个随机到达会发生多少次?
- ◇ 如果是关于零件更换的问题, 涉及到产量, 考虑要准备多少零件?
- ◇ 机器已经使用了 1000 小时, 下一次使用/故障大概发生在什么时候?



例 2. 设 X_i 服从参数为 λ 的指数分布, 求 $N(t)$ 的分布.

解. 由于指数分布的无记忆性, 可得

$$\mathbb{P}(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

#

也就是说,

如果 X_i 服从参数为 λ 的指数分布, $\{N(t), t \geq 0\}$ 是速率为 λ 的 Poisson 过程.



例 2. 设 X_i 服从参数为 λ 的指数分布, 求 $N(t)$ 的分布.

解. 由于指数分布的无记忆性, 可得

$$\mathbb{P}(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

#

也就是说,

如果 X_i 服从参数为 λ 的指数分布, $\{N(t), t \geq 0\}$ 是速率为 λ 的 Poisson 过程.



例 2. 设 X_i 服从参数为 λ 的指数分布, 求 $N(t)$ 的分布.

解. 由于指数分布的无记忆性, 可得

$$\mathbb{P}(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

#

也就是说,

如果 X_i 服从参数为 λ 的指数分布, $\{N(t), t \geq 0\}$ 是速率为 λ 的 Poisson 过程.



大数律的推论

根据我们的假设 $0 < \mu \equiv \mathbb{E}X_n \leq \infty$, 由强大数律可知,

$$\text{当 } n \text{ 充分大时, } \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mu, \text{ 而 } \mu > 0.$$

也就是说,

$$\text{当 } n \text{ 充分大时, } S_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \infty.$$

注. 对 $\forall t > 0$, 至多只有有限个 n 值使得 $S_n \leq t$. 此时,

$$N(t) = \max\{n > 0 : S_n \leq t\}.$$



大数律的推论

根据我们的假设 $0 < \mu \equiv \mathbb{E}X_n \leq \infty$, 由强大数律可知,

$$\text{当 } n \text{ 充分大时, } \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mu, \text{ 而 } \mu > 0.$$

也就是说,

$$\text{当 } n \text{ 充分大时, } S_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \infty.$$

注. 对 $\forall t > 0$, 至多只有有限个 n 值使得 $S_n \leq t$. 此时,

$$N(t) = \max\{n > 0 : S_n \leq t\}.$$



大数律的推论

根据我们的假设 $0 < \mu \equiv \mathbb{E}X_n \leq \infty$, 由强大数律可知,

$$\text{当 } n \text{ 充分大时, } \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mu, \text{ 而 } \mu > 0.$$

也就是说,

$$\text{当 } n \text{ 充分大时, } S_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \infty.$$

注. 对 $\forall t > 0$, 至多只有有限个 n 值使得 $S_n \leq t$. 此时,

$$N(t) = \max\{n > 0 : S_n \leq t\}.$$



第二节 $N(t)$ 的分布与更新函数

基本关系: $\{N(t) \geq n\} = \{S_n \leq t\}$.

$$\{N(t) = n\} = \{S_n \leq t < S_{n+1}\}.$$

设 X_n 共同的分布函数为 F , F_n 为 F 的 n 重卷积, 那么

$$S_n \sim F_n.$$

$N(t)$ 的分布

对任意 $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(N(t) = n) = F_n(t) - F_{n+1}(t), \quad n \geq 1.$$



第二节 $N(t)$ 的分布与更新函数

基本关系: $\{N(t) \geq n\} = \{S_n \leq t\}$.

$$\{N(t) = n\} = \{S_n \leq t < S_{n+1}\}.$$

设 X_n 共同的分布函数为 F , F_n 为 F 的 n 重卷积, 那么

$$S_n \sim F_n.$$

$N(t)$ 的分布

对任意 $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(N(t) = n) = F_n(t) - F_{n+1}(t), \quad n \geq 1.$$



对任意 $t \geq 0$, 定义 $m(t) := \mathbb{E}N(t)$, 称为更新函数.

命题 5.2.1

对任意 $t \geq 0$,

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) < \infty.$$

事实上, 前半部分是由于

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(N(t) \geq n) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(S_n \leq t).$$

后半部分是因为每次事件间隔 X_i 都是正数 ($\mathbb{P}(X_i > 0) > 0$).
既然每次都要花时间, 那么在有限的时间 t 内, 不可能发生无限次事件.



注意: 由数学归纳法, $F_n(t) \leq (F(t))^n, t \geq 0$.

推论 5.2.1

对任意 $t \geq 0$, 如果 $F(t) < 1$, 那么

$$m(t) \leq \frac{F(t)}{1 - F(t)}.$$

例如, 假设 $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, 那么

$$m(t) = \lambda t, t \geq 0.$$



第三节 极限定理与停时

下面关注更新过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 的极限行为.

首先, 记 $N(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} N(t)$: 表示总的更新次数. 注意到,

$$\{N(\infty) < \infty\} = \{\exists n, X_n = \infty\}.$$

由概率的次可列可加性

$$0 \leq \mathbb{P}(N(\infty) < \infty) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = \infty) = 0.$$

也就是说,

$$\mathbb{P}(N(\infty) = \infty) = 1.$$



第三节 极限定理与停时

下面关注更新过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 的极限行为.

首先, 记 $N(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} N(t)$: 表示总的更新次数. 注意到,

$$\{N(\infty) < \infty\} = \{\exists n, X_n = \infty\}.$$

由概率的次可列可加性

$$0 \leq \mathbb{P}(N(\infty) < \infty) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = \infty) = 0.$$

也就是说,

$$\mathbb{P}(N(\infty) = \infty) = 1.$$



第三节 极限定理与停时

下面关注更新过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 的极限行为.

首先, 记 $N(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} N(t)$: 表示总的更新次数. 注意到,

$$\{N(\infty) < \infty\} = \{\exists n, X_n = \infty\}.$$

由概率的次可列可加性

$$0 \leq \mathbb{P}(N(\infty) < \infty) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = \infty) = 0.$$

也就是说,

$$\mathbb{P}(N(\infty) = \infty) = 1.$$



第三节 极限定理与停时

下面关注更新过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 的极限行为.

首先, 记 $N(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} N(t)$: 表示总的更新次数. 注意到,

$$\{N(\infty) < \infty\} = \{\exists n, X_n = \infty\}.$$

由概率的次可列可加性

$$0 \leq \mathbb{P}(N(\infty) < \infty) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = \infty) = 0.$$

也就是说,

$$\mathbb{P}(N(\infty) = \infty) = 1.$$



Q. $N(t)$ 趋于无穷的速度是多少? $N(t)$ 的渐近行为有何结果?

命题 5.3.1

$$\mathbb{P}\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} N(t) = \frac{1}{\mu}\right) = 1.$$

也就是说, (以概率 1) 长时间后更新发生的速率为 $1/\mu$.
通常称 $1/\mu$ 为更新过程的速率/强度.



Q. $N(t)$ 趋于无穷的速度是多少? $N(t)$ 的渐近行为有何结果?

命题 5.3.1

$$\mathbb{P}\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} N(t) = \frac{1}{\mu}\right) = 1.$$

也就是说, (以概率 1) 长时间后更新发生的速率为 $1/\mu$.
通常称 $1/\mu$ 为更新过程的速率/强度.



证. 注意到,

- $S_{N(t)}$: 在 t 之前或 t 时刻最后一次更新的时刻,
- $S_{N(t)+1}$: t 时刻之后第一次更新的时刻.

即

$$S_{N(t)} \leq t < S_{N(t)+1}.$$

由强大数律有

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} < \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mu.$$

得证. □



证. 注意到,

- $S_{N(t)}$: 在 t 之前或 t 时刻最后一次更新的时刻,
- $S_{N(t)+1}$: t 时刻之后第一次更新的时刻.

即

$$S_{N(t)} \leq t < S_{N(t)+1}.$$

由强大数律有

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} < \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mu.$$

得证. □



下面关注量化交易策略的循环频率

例 5.3.1. 某量化交易团队运行一个高频策略. 策略流程如下:

1. 持仓阶段: 每次开仓后, 持仓时间 (小时) 服从均匀分布 $U(30, 60)$;
2. 清算阶段: 平仓后, 需要进行资金清算和策略重置, 耗时 (小时) 服从均匀分布 $U(0, 1)$;
3. 循环: 清算完成后立即开始下一轮交易.

问: 长期来看, 该策略平均每小时的交易频率是多少? 并说明理论依据.

解. 将“完成一次完整的交易循环”(持仓 + 清算)视为一次更新, 则

$$\mu = \mathbb{E}U_1 + \mathbb{E}U_2 = 45 + 0.5 = 91/2,$$

其中 $U_1 \sim U(30, 60)$, $U_2 \sim U(0, 1)$. 也就是说, 该策略长期平均每 45.5 小时完成一次交易, 或者说每 91 小时完成 2 次交易.



下面关注量化交易策略的循环频率

例 5.3.1. 某量化交易团队运行一个高频策略. 策略流程如下:

1. 持仓阶段: 每次开仓后, 持仓时间 (小时) 服从均匀分布 $U(30, 60)$;
2. 清算阶段: 平仓后, 需要进行资金清算和策略重置, 耗时 (小时) 服从均匀分布 $U(0, 1)$;
3. 循环: 清算完成后立即开始下一轮交易.

问: 长期来看, 该策略平均每小时的交易频率是多少? 并说明理论依据.

解. 将“完成一次完整的交易循环”(持仓 + 清算)视为一次更新, 则

$$\mu = \mathbb{E}U_1 + \mathbb{E}U_2 = 45 + 0.5 = 91/2,$$

其中 $U_1 \sim U(30, 60)$, $U_2 \sim U(0, 1)$. 也就是说, 该策略长期平均每 45.5 小时完成一次交易, 或者说每 91 小时完成 2 次交易.



下面关注量化交易策略的循环频率

例 5.3.1. 某量化交易团队运行一个高频策略. 策略流程如下:

1. 持仓阶段: 每次开仓后, 持仓时间 (小时) 服从均匀分布 $U(30, 60)$;
2. 清算阶段: 平仓后, 需要进行资金清算和策略重置, 耗时 (小时) 服从均匀分布 $U(0, 1)$;
3. 循环: 清算完成后立即开始下一轮交易.

问: 长期来看, 该策略平均每小时的交易频率是多少? 并说明理论依据.

解. 将“完成一次完整的交易循环”(持仓 + 清算)视为一次更新, 则

$$\mu = \mathbb{E}U_1 + \mathbb{E}U_2 = 45 + 0.5 = 91/2,$$

其中 $U_1 \sim U(30, 60)$, $U_2 \sim U(0, 1)$. 也就是说, 该策略长期平均每 45.5 小时完成一次交易, 或者说每 91 小时完成 2 次交易.

#



- 例 5.3.2 (交易信号捕获率) 假设信号按速率为 λ 的 Poisson 过程到达系统. 规则是: 持仓期间忽略新信号. 假定持仓时间是一个具有分布 G 的随机变量, 那么
- (1) 信号进入系统的速率是多少?
 - (2) 交易信号(成功开仓)捕捉率是多少?



解. 更新循环定义:

一次循环 = 持仓时间 (Busy) + 等待信号 (Idle).

(1) 平均循环长度是

$$\mu = \mu_G + \frac{1}{\lambda},$$

所以长期成功开仓速率是

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{1 + \lambda\mu_G}.$$

(2) 信号捕获比例是

$$\frac{\lambda/(1 + \lambda\mu_G)}{\lambda} = \frac{1}{1 + \lambda\mu_G}.$$



解. 更新循环定义:

一次循环 = 持仓时间 (Busy) + 等待信号 (Idle).

(1) 平均循环长度是

$$\mu = \mu_G + \frac{1}{\lambda},$$

所以长期成功开仓速率速率是

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{1 + \lambda\mu_G}.$$

(2) 信号捕获比例是

$$\frac{\lambda/(1 + \lambda\mu_G)}{\lambda} = \frac{1}{1 + \lambda\mu_G}.$$



解. 更新循环定义:

一次循环 = 持仓时间 (Busy) + 等待信号 (Idle).

(1) 平均循环长度是

$$\mu = \mu_G + \frac{1}{\lambda},$$

所以长期成功开仓速率速率是

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{1 + \lambda\mu_G}.$$

(2) 信号捕获比例是

$$\frac{\lambda/(1 + \lambda\mu_G)}{\lambda} = \frac{1}{1 + \lambda\mu_G}.$$



3. (习题五) 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个更新过程, $X_n, n \geq 1$ 是更新时间间隔序列, $m(t) = \lambda t, t \geq 0$ 为其更新函数, 试求

$$\mathbb{E}[\exp\{-t \sum_{i=1}^n X_i\}], \quad t > 0.$$

解. 首先更新函数 $m(t) = \lambda t$, 表明该过程是一个 Poisson 过程, 时间间隔 X_i 是指数分布 $\text{Exp}(\lambda)$, 所以

$$\mathbb{E}[\exp\{-t \sum_{i=1}^n X_i\}] = (\mathbb{E}[\exp(-tX_i)])^n = \left(\frac{\lambda}{t + \lambda}\right)^n.$$



5. (习题五) 设更新过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 的到达时间间隔服从密度函数 $p(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$. 试证更新函数

$$m(t) = \frac{\lambda t}{2} - \frac{1}{4}(1 - e^{-2\lambda t}).$$

证. 因为更新时间间隔 $X_n \sim \Gamma(2, \lambda)$, $\sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(2n, \lambda)$, 所以

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{\lambda^{2n}}{\Gamma(2n)} x^{2n-1} e^{-\lambda x} dx.$$

从而

$$\begin{aligned} m(t) &= \sum_{n \geq 1} F_n(t) = \int_0^t \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\lambda^{2n}}{\Gamma(2n)} x^{2n-1} \right) e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^t \lambda \frac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}{2} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda t}{2} - \frac{1}{4}(1 - e^{-2\lambda t}). \end{aligned}$$



7. (习题五) 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个更新过程, 其更新间距的概率密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha(x-\beta)}, & x > \beta, \\ 0, & x \leq \beta, \end{cases}$$

试求 $\mathbb{P}(N(t) \geq k), k \geq 0$.

解. 首先 $N(t) \geq k$ 等价于 $S_k \leq t$, 而 S_k 的密度函数是

$$f(y) = \frac{\alpha^k}{\Gamma(k)} (y - k\beta)^{k-1} e^{-\alpha(y-k\beta)}, \quad y > k\beta.$$

所以

$$\mathbb{P}(N(t) \geq k) = \mathbb{P}(S_k \leq t) = \int_{k\beta}^t \frac{\alpha^k}{\Gamma(k)} (y - k\beta)^{k-1} e^{-\alpha(y-k\beta)} dy.$$



下面为研究 $m(t)$ 及

$$\frac{m(t)}{t} = \mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]: \text{更新的平均速度}$$

的渐近性质, 先引入停时的概念.

定义 5.3.1: (离散型的停时)

设 N 为非负整数值随机变量, X_1, X_2, \dots 为任意随机变量序列, 若对任意 $n = 1, 2, \dots$,

$$\{N = n\} \text{ 关于 } \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ 可测,}$$

则称 N 为关于 $\{X_n\}$ 的停时/Markov 时间.



最优停时理论是概率论的新分支, 停时可用来寻找最优停止策略.

例 5.3.4 (a) 假设 X_1, X_2, \dots i.i.d.:

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}.$$

$N := \min\{n : X_1 + \dots + X_n = 10\}$ 是停时.

(b) 假设 X_1, X_2, \dots i.i.d.:

$$\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}.$$

$N := \min\{n : X_1 + \dots + X_n = 1\}$ 也为停时. #



定理 5.3.1: (Wald 等式)

设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为独立同分布的可积随机变量序列,
 N 为关于 $\{X_n, n \geq 1\}$ 的停时且 $\mathbb{E}N < \infty$, 则

$$\mathbb{E} \sum_{n=1}^N X_n = \mathbb{E}N \cdot \mathbb{E}X_1.$$



证. 因为 $\sum_{n=1}^N X_n = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cdot 1_{\{N \geq n\}}$, 由 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^N X_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_n 1_{\{N \geq n\}}].$$

因为 X_n 与 $\{N \geq n\}$ 独立, 事实上,

$$\{N \geq n\} = \{N < n\}^c = (\{N = 1\} \cup \dots \cup \{N = n - 1\})^c.$$

所以

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^N X_n\right] &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_n] \mathbb{E}[1_{\{N \geq n\}}] \\ &= \mathbb{E}X_1 \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N \geq n) = \mathbb{E}N \cdot \mathbb{E}X_1. \end{aligned}$$



注意, Wald 等式是有条件的.

例 5.3.4 (续):

- (a) 假设 X_1, X_2, \dots i.i.d.: $\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}$.
对于停时 $N := \min\{n : X_1 + \dots + X_n = 10\}$,

$$10 = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[N] \Rightarrow \mathbb{E}[N] = 20.$$

- (b) 假设 X_1, X_2, \dots i.i.d.: $\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}$.
对于停时 $N := \min\{n : X_1 + \dots + X_n = 1\}$,

$$1 = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] \neq \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[N] = 0.$$

实际上, 这里的 N 其期望 $\mathbb{E}[N] = \infty$.

#



例 3. 设 $X_i, i \geq 1$ 是独立同分布随机序列, $\mathbb{E}[X_i] = 10$. 定义停时

$$T = \min\{n : S_n > 100\},$$

且已知 $\mathbb{E}[T] = 11$, 求 $\mathbb{E}[S_T]$.

解. 由Wald 等式

$$\mathbb{E}[S_T] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[T] = 10 \times 11 = 110.$$

#



例 3. 设 $X_i, i \geq 1$ 是独立同分布随机序列, $\mathbb{E}[X_i] = 10$. 定义停时

$$T = \min\{n : S_n > 100\},$$

且已知 $\mathbb{E}[T] = 11$, 求 $\mathbb{E}[S_T]$.

解. 由Wald 等式

$$\mathbb{E}[S_T] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[T] = 10 \times 11 = 110.$$

#



设 $\{X_n, n \geq 1\}$: 更新过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 的来到间隔序列.
 由 Wald 等式, 有如下推论.

推论 5.3.1

若 $\mu = \mathbb{E}X_1 < \infty$, 则

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)+1} X_n\right] = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}[N(t) + 1] = \mu(m(t) + 1).$$



证. 只需证 $N(t) + 1$ 是关于序列 $\{X_t\}$ 的停时即可.
事实上, $N(t) + 1 = n$ 等价于

$$X_1 + \cdots + X_{n-1} \leq t \text{ 且 } X_1 + \cdots + X_n > t.$$

所以, $\{N(t) + 1 = n\}$ 只依赖于 X_1, \cdots, X_n 而与 X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots 无关. □



下面的结果说明, 平均更新频率趋向于平均更新周期的倒数, 简单地说, 频率是周期的倒数.

定理 5.3.2: (基本更新定理)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} m(t) = \frac{1}{\mu} \quad \left(\text{设 } \frac{1}{\infty} = 0 \right).$$

直观上, 可以借助推论 5.3.1 给出.



下面的结果说明, 平均更新频率趋向于平均更新周期的倒数, 简单地说, 频率是周期的倒数.

定理 5.3.2: (基本更新定理)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} m(t) = \frac{1}{\mu} \quad \left(\text{设 } \frac{1}{\infty} = 0 \right).$$

直观上, 可以借助推论 5.3.1 给出.



下例说明前面两个极限定理不是简单的推论关系.

例 5.3.5 设 U 为 $(0, 1)$ 上均匀分布随机变量, 对 $n = 1, 2, \dots$ 定义

$$Y_n := \begin{cases} 0, & U > \frac{1}{n}, \\ n, & U \leq \frac{1}{n}, \end{cases}$$

则 $\mathbb{P}(Y_n \rightarrow 0, \text{ 当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}) = 1$, 但

$$\mathbb{E} Y_n = n\mathbb{P}(U \leq \frac{1}{n}) = 1 \neq 0.$$

#



例 4. 假设 ATM 机平均每5分钟有一个顾客, 求长期平均顾客到达率.

解. 由基本更新定理, 长期平均到达率是

$$\frac{1}{\mu} = 0.2(\text{人/分钟}) = 12(\text{人/小时}).$$

#



例 4. 假设 ATM 机平均每5分钟有一个顾客, 求长期平均顾客到达率.

解. 由基本更新定理, 长期平均到达率是

$$\frac{1}{\mu} = 0.2(\text{人/分钟}) = 12(\text{人/小时}).$$

#



例 5. (更新报酬过程) 假设:

- (1) $\{(X_n, R_n), n \geq 1\}$ 是独立同分布的随机向量对序列, 其中 $X_n > 0$ 表示第 $n-1$ 次与第 n 次事件之间的时间间隔, R_n 表示在第 n 次事件发生时获得的随机报酬.
(R_n 可以为负, 表示成本或损失.)
- (2) 到时间 t 的总报酬记为

$$R(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} R_n.$$

若 $\mathbb{E}[|R_1|] < \infty, \mathbb{E}[X_1] < \infty$, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{\mathbb{E}[R_1]}{\mathbb{E}[X_1]} \text{ a.s.}$$

比如, 保险公司每次索赔平均金额是 ¥10,000 元, 平均每 100 天发生一次索赔, 那么长期日均赔付额是

$$\frac{10000}{100} = 100 \text{ (元/天).}$$



例 5. (更新报酬过程) 假设:

- (1) $\{(X_n, R_n), n \geq 1\}$ 是独立同分布的随机向量对序列, 其中 $X_n > 0$ 表示第 $n-1$ 次与第 n 次事件之间的时间间隔, R_n 表示在第 n 次事件发生时获得的随机报酬.
 (R_n 可以为负, 表示成本或损失.)
- (2) 到时间 t 的总报酬记为

$$R(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} R_n.$$

若 $\mathbb{E}[|R_1|] < \infty, \mathbb{E}[X_1] < \infty$, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{\mathbb{E}[R_1]}{\mathbb{E}[X_1]} \text{ a.s.}$$

比如, 保险公司每次索赔平均金额是 ¥10,000 元, 平均每 100 天发生一次索赔, 那么长期日均赔付额是

$$\frac{10000}{100} = 100(\text{元/天}).$$



例 5. (更新报酬过程) 假设:

- (1) $\{(X_n, R_n), n \geq 1\}$ 是独立同分布的随机向量对序列, 其中 $X_n > 0$ 表示第 $n-1$ 次与第 n 次事件之间的时间间隔, R_n 表示在第 n 次事件发生时获得的随机报酬.
 (R_n 可以为负, 表示成本或损失.)
- (2) 到时间 t 的总报酬记为

$$R(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} R_n.$$

若 $\mathbb{E}[|R_1|] < \infty, \mathbb{E}[X_1] < \infty$, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{\mathbb{E}[R_1]}{\mathbb{E}[X_1]} \text{ a.s.}$$

比如, 保险公司每次索赔平均金额是 ¥10,000 元, 平均每 100 天发生一次索赔, 那么长期日均赔付额是

$$\frac{10000}{100} = 100(\text{元/天}).$$



补充题 1. 某保险公司正在评估一款保险产品的风险与定价. 根据历史数据, 该产品的理赔过程符合更新报酬模型. 目前的基础数据如下:

- 理赔频率: 平均每 45 天发生一次理赔(即理赔间隔期望 $\mathbb{E}[X] = 45$ 天).
- 理赔金额: 每次理赔的平均金额为 8000 元 (即单次理赔期望 $\mathbb{E}[R] = 8000$ 元).

问题:

- (1) 请计算该保险产品的长期日均赔付额和长期年均赔付额.
- (2) (盈亏分析) 假设该产品的年保费收入固定为 80,000 元/年, 请问保险公司目前的预期年利润是多少?
- (3) (风险情景分析) 如果市场环境恶化, 导致理赔变得更加频繁, 平均理赔间隔缩短到了 30 天, 在保费不变的情况下, 保险公司的财务状况会发生什么变化?



补充题 2. 现有某短线投机交易策略:

- 策略平均持仓周期为 10 天, 即一次完整开仓-平仓的循环周期, 为一个更新区间, 周期均值 $\mu = \mathbb{E}[T] = 10$ 天;
- 每完成一次完整交易循环, 策略可获得固定毛利 1%;
- 每次平仓离场, 需支付固定交易成本 0.1%.

问题:

- (1) 利用更新定理, 求解该策略的长期日均平均收益率;
- (2) 若要实现长期盈亏平衡, 该策略最长/最优的交易间隔周期应是多少?
- (3) 从更新过程视角, 解释“资金周转率”对长期收益的影响.

